

文章编号:1000-8055(2013)03-0613-08

基于解析解的人字齿轮齿廓修形动态分析

郭家舜, 王三民, 王 颖

(西北工业大学 机电学院 西安 710072)

摘 要: 根据人字齿轮传动的结构, 考虑时变啮合刚度、齿侧间隙, 并把齿廓修形作为一种时变齿侧间隙计入, 建立了单级人字齿轮传动的弯-扭-轴耦合动力学模型和相应的非线性动力学方程. 对方程的数值解进行分析, 发现合理的修形使人字齿轮传动不发生齿面的完全分离. 基于多尺度法对不发生齿面完全分离时的人字齿轮传动系统进行了摄动分析, 得到了系统在主共振频率附近幅频响应的近似解析解. 相比数值方法, 解析法具有很高的求解效率. 最后, 根据近似解析解研究了修形参数对动载系数幅值的影响. 研究发现: 螺旋角越大使动载系数最小所需的修形量越大, 而所需的修形长度越小. 另外, 使动载系数最小的最优修形参数解域呈新月形, 其随着主动轮支承刚度的增大而先增大后减小; 随着被动轮支承刚度的增大而持续减小.

关 键 词: 人字齿轮; 非线性动力学; 齿廓修形; 多尺度法; 动态分析

中图分类号: V232.8; TH113

文献标志码: A

Dynamic analysis of tooth profile modification to herringbone gears based on analytical solutions

GUO Jia-shun, WANG San-min, WANG Ying

(School of Mechanical Engineering,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Based on the structure of a single-stage herringbone gear transmission, a nonlinear lateral-torsional-axial coupling dynamic model and corresponding dynamic equations considering the time-varying mesh stiffness, tooth profile modification and tooth backlash were proposed, for which the tooth profile modification was considered as a time-varying tooth backlash. The numerical solutions were analyzed and the results show that the total tooth separation can be suppressed with rational tooth profile modification. Then, according to the method of multiple scales, perturbation analysis of the dynamic equations finds that appropriate analytical frequency response solutions for the case cause no total tooth separation at primary resonance. Compared to the numerical method, the analytical method is more efficient. At last, the influence of the modification parameters on the amplitude of the dynamic load factor was analyzed on the basis of the analytical solutions. The analysis results present that the magnitude of tip relief decreases as the helical angle increases to reduce the dynamic load factor, while the length of modification increases in this case. In addition, the optimal solution domain of the minimum dynamic load factor is a meniscoid zone, it increases firstly as the support stiffness of the driving gear increases to a value, after that

收稿日期: 2012-03-26

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130326.1743.201303.613_020.html

基金项目: 国家高技术研究发展计划(2009AA04Z404)

作者简介: 郭家舜(1984—), 男, 陕西咸阳人, 博士生, 主要从事机械系统动力学及机械可靠性研究.

value, it decreases when the support stiffness of the driving gear continues to increase; the optimal solution domain decreases as the support stiffness of the driven gear continuously increases.

Key words: herringbone gears; nonlinear dynamics; tooth profile modification; method of multiple scales; dynamic analysis

人字齿轮具有承载能力大、传动平稳、可以抵消轴向载荷的突出优点,在航空工业领域中得到了越来越多的应用,如英国罗·罗公司(Rolls-Royce)和美国普惠公司(Pratt & Whitney)正在研制的齿轮驱动风扇(GTF)发动机的风扇齿轮驱动系统就采用了人字齿轮,因此对人字齿轮传动的研究成为热点。众所周知,当激励频率接近某一阶固有频率时,传动系统发生共振,齿轮和轴承的动载荷幅值迅速增大,可以达到非共振状态时的数倍甚至数十倍,有可能造成严重破坏,或者大幅减低系统的寿命,所以必须减小共振频率附近的振幅。目前齿廓修形是减小齿轮振动最为直接有效的方法,选取合理的修形参数对于减小人字齿轮振动至关重要。当前对于人字齿轮修形的研究主要集中在齿轮接触分析(TCA)^[1-4]和动力学分析^[5-8]两个方面。其中 TCA 分析是一种静态或准动态的分析方法,对于高速传动系统来讲基于动力学模型的动态分析方法能更准确地反映齿廓修形对系统的振动幅值、振动加速度等动力学特性的影响。Lin 等人^[7]建立了单对直齿轮传动的纯扭转动力学模型,分别研究了直线齿廓修形和抛物线齿廓修形对动载荷的影响。LIU 和 Parker^[8]建立了考虑直线齿廓修形的两级直齿轮传动的纯扭转动力学模型,基于近似解析解研究了修形参数对系统动态传动误差的影响。

纯扭转模型对于直齿轮传动是适用的,但是对于人字齿轮传动来说,由于横向和轴向的振动是不可忽略的,需要建立更为精细的模型。本文建立了单对人字齿轮传动的弯-扭-轴耦合动力学模型,考虑时变啮合刚度、齿侧间隙和直线齿廓修形,基于多尺度法推导了系统在主共振频率附近幅频响应的近似解析解,研究了齿廓修形参数对人字齿轮传动主共振时动载系数幅值的影响。

1 动力学模型

1.1 齿廓修形模型

本文只研究直线型齿顶修形对人字齿轮传动动态特性的影响。其中,大齿轮和小齿轮具有相同

的齿顶修形。这里把齿顶修形作为一个沿啮合线随时间变化的齿侧间隙。一般来讲,人字齿轮的重合度都大于 2,也就是说至少有两对轮齿同时参与啮合。对于重合度在 2 到 3 之间的人字齿轮来说,一个啮合周期可以分为双齿啮合区和三齿啮合区,对应的在轮齿的法向齿廓上有一系列的参考点,如图 1 所示。当处于三齿啮合状态的时候,第 1 对轮齿正在退出啮合,其接触点从最高双齿啮合点向齿顶移动,修形间隙呈线性增大;同时,第 2 对轮齿的接触点位于最高双齿啮合点和最低双齿啮合点之间,无修形间隙;第 3 对轮齿正在进入啮合,其接触点从齿顶向最高双齿啮合点移动,修形间隙呈线性减小。当处于双齿啮合状态的时候,第 1 对和第 2 对轮齿的接触点都处于最高双齿啮合点和最低双齿啮合点之间,无修形间隙。

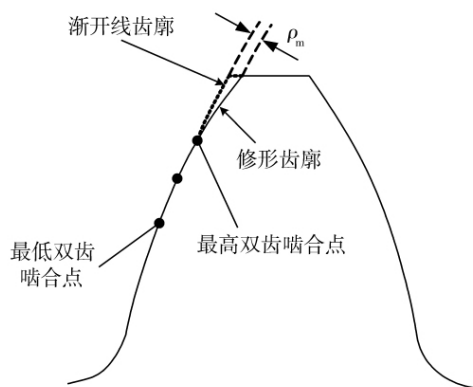


图 1 直线型齿顶修形的法向齿廓

Fig. 1 Normal tooth profile of linear tip relief

根据以上分析,直线型齿顶修形方程的图形如图 2 所示,其表达式可以写为

$$g^p = \begin{cases} \frac{\rho_m}{t_e - t_s}(t - t_s), & p = 1 \\ \frac{\rho_m}{t_e - t_s}(t_s - t) + \rho_m, & p = 3 \\ 0, & p = 2 \text{ 或 } t \notin [nT_m + t_s, nT_m + t_e] \\ n = 0, 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (1)$$

式中 ρ_m 是修形量; ξ_m 是修形长度, 这里定义 $\xi_m = c - 2$; c 是重合度. 在一个啮合周期 T_m 内, 从进入啮合, 即 0 时刻开始, 到 t_s 时刻为双齿啮合; t_s 时刻到 t_e 时刻为三齿啮合; t_e 到一个啮合周期结束为双齿啮合. t_s 和 t_e 的表达式如图 2 所示.

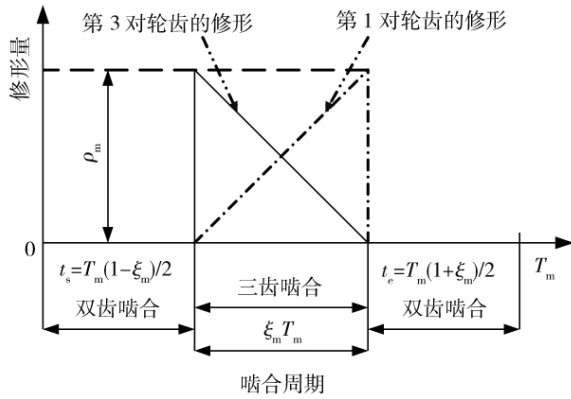


图2 直线型齿顶修形方程的曲线

Fig. 2 Curve of linear tip relief function

1.2 人字齿轮副动力学模型

一个人字齿轮可以看作是由 2 个旋向相反的斜齿轮组合而成. 在人字齿轮传动中, 被动轮可以沿轴向浮动. 其动力学模型如图 3 所示. 整个动力学模型由 4 个质量节点组成, 每个节点具有沿 x , y , z 轴移动以及绕 z 轴的转动 4 个自由度. 质点 m_1 和 m_3 啮合, m_2 和 m_4 啮合. 由拉格朗日方程, 得动力学方程

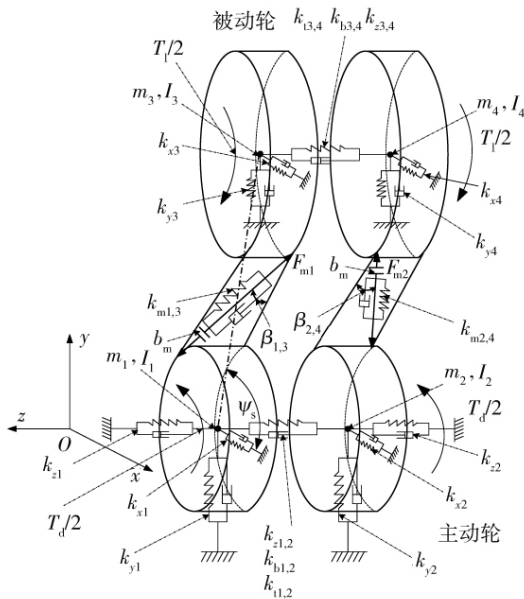


图3 人字齿轮传动动力学模型

Fig. 3 Dynamic model of herringbone gear transmissions

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_{b1,2}(x_1 - x_2) + k_{x1}x_1 = F_{x1,3} \\ m_1 \ddot{y}_1 + k_{b1,2}(y_1 - y_2) + k_{y1}y_1 = F_{y1,3} \\ m_1 \ddot{z}_1 + k_{z1,2}(z_1 - z_2) + k_{z1}z_1 = F_{z1,3} \\ I_1 \ddot{\theta}_1 + k_{t1,2}(\theta_1 - \theta_2) = -F_{m1,3}r_1 \cos \beta_{1,3} + T_d/2 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_{b1,2}(x_2 - x_1) + k_{x2}x_2 = F_{x2,4} \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_{b1,2}(y_2 - y_1) + k_{y2}y_2 = F_{y2,4} \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_{z1,2}(z_2 - z_1) + k_{z2}z_2 = F_{z2,4} \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + k_{t1,2}(\theta_2 - \theta_1) = -F_{m2,4}r_2 \cos \beta_{2,4} + T_d/2 \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_{b3,4}(x_3 - x_4) + k_{x3}x_3 = -F_{x1,3} \\ m_3 \ddot{y}_3 + k_{b3,4}(y_3 - y_4) + k_{y3}y_3 = -F_{y1,3} \\ m_3 \ddot{z}_3 + k_{z3,4}(z_3 - z_4) = -F_{z1,3} \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + k_{t3,4}(\theta_3 - \theta_4) = F_{m1,3}r_3 \cos \beta_{1,3} - T_1/2 \\ m_4 \ddot{x}_4 + k_{b3,4}(x_4 - x_3) + k_{x4}x_4 = -F_{x2,4} \\ m_4 \ddot{y}_4 + k_{b3,4}(y_4 - y_3) + k_{y4}y_4 = -F_{y2,4} \\ m_4 \ddot{z}_4 + k_{z3,4}(z_4 - z_3) = -F_{z2,4} \\ I_4 \ddot{\theta}_4 + k_{t3,4}(\theta_4 - \theta_3) = F_{m2,4}r_4 \cos \beta_{2,4} - T_1/2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} F_{xj,j+2} = -F_{mj,j+2} \sin(\psi_s + \alpha) \cos \beta_{j,j+2} \\ F_{yj,j+2} = -F_{mj,j+2} \cos(\psi_s + \alpha) \cos \beta_{j,j+2} \\ F_{zj,j+2} = F_{mj,j+2} \sin \beta_{j,j+2} \\ F_{mj,j+2} = \sum_{p=1}^3 k_{np}^p(t) \delta_n(\lambda_n), \\ j = 1, 2; \hat{n} = 1, 2; \\ \delta_n(\lambda_n) = \begin{cases} \lambda_n - (b_m + g_n^p), & \lambda_n > (b_m + g_n^p) \\ 0, & \lambda_n \leq |b_m + g_n^p| \\ \lambda_n + (b_m + g_n^p), & \lambda_n < -(b_m + g_n^p) \end{cases} \\ \lambda_n = \left[(x_j - x_{j+2}) \cos\left(\psi_s + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + (y_{j+2} - y_j) \cdot \right. \\ \left. \sin\left(\psi_s + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + r_j \theta_j - r_{j+2} \theta_{j+2} \right] \cos \beta_{j,j+2} - \\ \left. z_p \sin \beta_{j,j+2} + z_g \sin \beta_{j,j+2} \right] \end{cases} \quad (3)$$

式中 x_i, y_i, z_i, θ_i 分别是沿 x, y, z 轴的位移以及绕 z 轴的转动位移 ($i = 1, 2, 3, 4$), m_i 和 I_i 分别是质量和转动惯量, $k_{b1,2}$ 为支撑刚度, $k_{z1,2}$ 为轴向拉压刚度, $k_{t1,2}$ 为轴的扭转刚度, T 是外扭矩, β 是螺旋角, ψ_s 是两齿轮连心线与 x 轴的夹角, α 是压力角, r_i 是基圆半径, k 是沿各方向的刚度, 如图 3 所示. k_{m1}^p 是齿轮 1 与齿轮 3 之间第 p 对轮齿的啮合刚度, 类似的 k_{m2}^p 是齿轮 2 和齿轮 4 之间第 p 对轮齿的啮合刚度. $\delta_n(\lambda_n)$ 是间隙函数, 其中 λ_n 是啮合轮齿间沿啮合线的相对位移, g_n^p 是第 p 对轮齿间的直线型齿顶修形函数, 如式 (1) 所示, $\hat{n}$ 是齿轮对的编号. b_m 是齿侧间隙. 时

变啮合刚度可以写成傅里叶级数的形式

$$k_{mn} = \sum_{p=1}^3 k_{mn}^p = \sum_{p=1}^3 \left[\hat{k}_{mn}^p + \left(\sum_{s=1}^{\infty} k_{mn}^{p,s} e^{is\omega t} + C \right) \right] \quad (4)$$

式中 $\hat{k}_{mn}^p$ 是单齿啮合刚度均值, $k_{mn}^{p,s}$ 是第 s 阶系数, ω 是啮合频率, C 是相应的共轭项. k_{mn} 是综合啮合刚度. 动力学方程写成矩阵的形式为

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + K_{\text{con}}X + \sum_{p=1}^3 [k_{m1}^p K_1 + k_{m2}^p K_2]X - E(\omega t, X) = F_t \quad (5)$$

式中 M, C 分别是质量矩阵和阻尼矩阵, 由于阻尼值很难获取, 所以 C 根据给定的模态阻尼比 ζ 获得^[9-12]. K_{con} 是常数刚度矩阵, 其中包括轴承刚度、扭转刚度和弯曲刚度; K_1 和 K_2 分别是与啮合关系有关的系数矩阵; $E(\omega t, X)$ 是非线性激励矩阵, 包括时变啮合刚度、齿侧间隙和齿廓修形因素; F_t 是外激励力向量.

2 数值解分析

人字齿轮传动的基本参数如表 1 所列. 采用数值方法对消除刚体位移和无量纲化后的动力学方程进行求解.

输入扭矩为 $127.32 \text{ N} \cdot \text{m}$, 输出扭矩为 $381.96 \text{ N} \cdot \text{m}$. 在转速为 4100 r/min 时不同修形量 ($0, 15, 25 \mu\text{m}$) 下齿轮 1 与齿轮 3 之间的动载系数如图 4 所示. 由于结构完全对称, 齿轮 2 与齿轮 4 之间的动载系数曲线与之完全相同. 其中动载系数定义为动态啮合力与静态啮合力之比, 即 $K_v = F_m/F_s$. 可以看出具有齿廓修形的齿轮动载系数的幅值明显小于没有齿廓修形的齿轮. 没有修形

表 1 人字齿轮传动参数

Table 1 Parameters of the herringbone gear transmission

参数	主动轮 1, 2	被动轮 3, 4
r_i/m	0.0875	0.2625
m_i/kg	2.455	7.346
$I_i/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.0024	0.0634
$\beta_i/(\circ)$	15	15
$\psi_s/(\circ)$	70	70
c	2.81	2.81
$b_m/\mu\text{m}$	10	10
$\rho_m/\mu\text{m}$	0, 15, 25	0, 15, 25

的人字齿轮动载系数出现 0 值和负值, 说明出现齿面完全分离和齿背冲击现象, 这是典型的非线性现象. 而当修形量 $\rho_m = 15 \mu\text{m}$ 时, 齿面完全分离次数明显减少, 不出现齿背冲击现象; $\rho_m = 25 \mu\text{m}$ 时, 齿面完全分离现象和齿背冲击现象完全消失, 动载系数最大振幅从 2.6 减小到 1.3.

具有不同修形量 ($0, 15, 25 \mu\text{m}$) 的人字齿轮传动在不同转速下的动载系数的最大值如图 5 所示. 可以看出: 没有修形的人字齿轮在临界转速附近发生共振, 振幅迅速增大, 并产生跳跃现象, 这也是非常典型的非线性现象^[13]; 当修形量 $\rho_m = 15 \mu\text{m}$ 时, 共振时的峰值大幅减小, 如在 4100 r/min 处, 从 2.6 降至 1.4, 只在 2600 r/min 和 3700 r/min 等处出现轻微的跳跃现象; $\rho_m = 25 \mu\text{m}$ 时, 各转速下振幅进一步减小, 不出现跳跃现象.

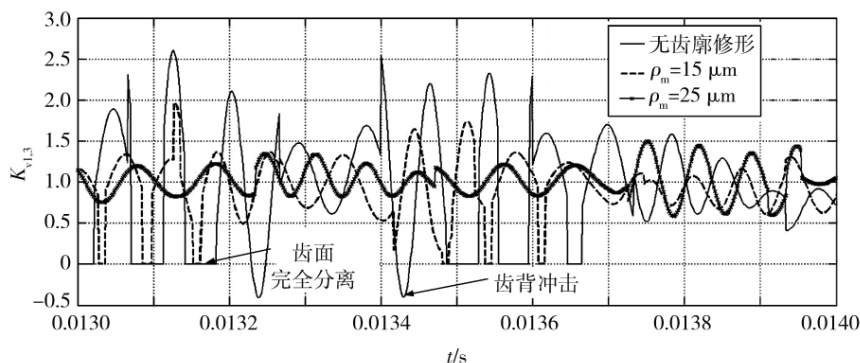


图 4 齿轮 1 和齿轮 3 之间的动载系数

Fig. 4 Dynamic load factor of pinion gear 1 and 3

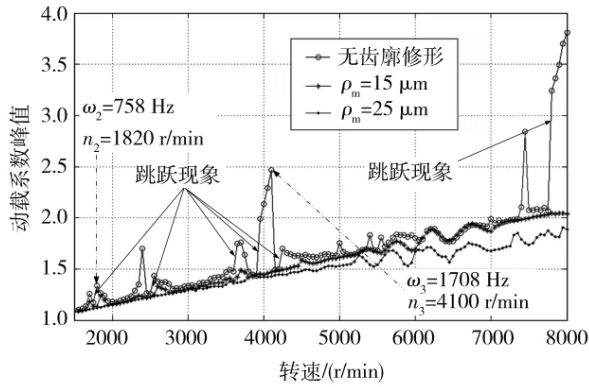


图5 不同转速下齿轮1和齿轮3之间的动载系数

Fig. 5 Dynamic load factor of pinion gear 1 and 3 with different revolving speeds

3 动力学方程的近似解析解

运用数值方法求解动力学方程可以获得较为精确的解,但是数值方法的求解速度较慢,不适于工程中针对不同参数取值的大量计算.然而直接把计算参数代入动力学方程的近似解析解即可算得结果,节省了大量的计算时间.如第2节所分析,合理的齿廓修形可以有效地抑制甚至消除人字齿轮传动非线性特性,即人字齿轮只在线性范围运转而不发生齿面完全分离的现象.因此不考虑齿面完全分离状态的动力学方程为

$$M\ddot{X} + K_{\text{con}}X + [k_{m1}K_1 + k_{m2}K_2]X - G(\omega t) = F_t \quad (6)$$

式中

$$G(\omega t) = \sum_{n=1}^2 \left(\sum_{p=1}^3 g_n^p k_{mn}^p \right) L_n = \sum_{n=1}^2 \tilde{g}_n L_n$$

式中 L_n 是相应的系数向量,可由公式(3)推得.综合啮合刚度 k_{mn} 和 $\tilde{g}_n$ 的傅里叶级数形式可以写为^[8,14-15]

$$k_{mn} = \hat{k}_{mn} + \epsilon \left(\sum_{s=1}^{\infty} \kappa_{mn}^s e^{is\omega t} + C \right), \quad \hat{n} = 1, 2 \quad (7)$$

式中

$$\chi = [\chi_1 \quad \chi_2 \quad \cdots \quad \chi_{16}]^T$$

$$\tilde{g}_n = \hat{g}_n + \epsilon \left(\sum_{s=1}^{\infty} \varphi_n^s e^{is\omega t} + C \right), \quad \hat{n} = 1, 2 \quad (8)$$

式中 $\hat{k}_{mn}$ 是平均综合刚度, $\hat{g}_n$ 是 $\tilde{g}_n$ 的平均值, κ_{mn}^s 和 φ_n^s 是各阶傅里叶级数的系数, $\epsilon = [\max(k_{mn}) - \min(k_{mn})] / \hat{k}_{mn}$ 是啮合刚度的变化率^[8,15]. 令式(6)中的 $G(\omega t)$ 和 F_t 为 0 得自由振动方程,根据自由振动方程得系统正则化模态矩阵 $\tilde{V}$. 将 $X = \tilde{V}q$ 代入式(6)把物理坐标下的广义位移转换到模态坐标下有:

$$\begin{cases} \frac{d^2 q_m}{dt^2} + \epsilon \mu \omega_m \frac{dq_m}{dt} + \omega_m^2 q_m + \epsilon (\tilde{V}^T K_t \tilde{V})_m - \\ \epsilon (\tilde{V}^T G_t)_m = [\tilde{V}^T (F_t + G_c)]_m \\ K_t = \sum_{n=1}^2 \left(\sum_{s=1}^{\infty} \kappa_{mn}^s e^{is\omega t} + C \right) K_n \\ G_t = \sum_{n=1}^2 \left(\sum_{s=1}^{\infty} \varphi_n^s e^{is\omega t} + C \right) L_n \\ G_c = \sum_{n=1}^2 \tilde{g}_n L_n \end{cases} \quad (9)$$

式中 $\mu = 2\zeta/\epsilon$, ω_m 是系统的第 $\hat{m}$ 阶固有频率, $(\cdots)_m$ 表示括号中矩阵的第 $\hat{m}$ 行. 因为 $\epsilon \leq 1$, 则式(9)的近似解可以写为

$$q_m = u_{m0}(t_0, t_1, \cdots) + \epsilon u_{m1}(t_0, t_1, \cdots) + O(\epsilon^2) \quad (10)$$

由多尺度法可知 q_m 的第1阶解 u_{m0} 的形式为

$$\begin{cases} u_{m0} = \chi_m + [A_m(t_1) e^{i\omega_m t_0} + \text{c. c.}] \\ \chi_m = [\tilde{V}^T (F_t + G_c)]_m / \omega_m^2 \end{cases} \quad (11)$$

当啮合频率接近某一阶固有频率时,即 $\omega = \omega_m + \epsilon\sigma$, 系统发生主共振,其中 σ 是去谐参数. 令 $A_m = a_m e^{i[\sigma t_1 - \gamma_m(t_1)]}$, 对于 $\omega_{\hat{m}+\hat{j}} \neq 2\omega_m$ ($\hat{j} = 1, 2, \cdots, 16 - \hat{m}$), 由多尺度法可得动力学方程的解 q_m 的第1阶幅值 a_m 在主共振频率附近的近似幅频表达式为

$$\begin{cases} a_m = \frac{E_1^I \sin \gamma_m - E_1^R \cos \gamma_m}{E_2^R \cos 2\gamma_m - E_2^I \sin 2\gamma_m - 2\omega_m(\omega - \omega_m)/\epsilon} \\ \gamma_m = \arctan \frac{E_1^I E_2^R - E_1^R E_2^I - 2\zeta \omega_m^2 E_1^I / \epsilon - 2\omega_m E_1^I (\omega - \omega_m) / \epsilon}{E_1^R E_2^R + E_1^I E_2^I - 2\zeta \omega_m^2 E_1^I / \epsilon + 2\omega_m E_1^I (\omega - \omega_m) / \epsilon} \\ E_1 = (\tilde{V}^T \kappa_1 \tilde{V} \chi)_m - (\tilde{V}^T \phi_1)_m, E_2 = (\tilde{V}^T \kappa_2 \tilde{V})_{m, \hat{m}} \\ \kappa_1 = \sum_{n=1}^2 \kappa_{mn}^1 K_n, \kappa_2 = \sum_{n=1}^2 \kappa_{mn}^2 K_n, \phi_1 = \sum_{n=1}^2 \varphi_{mn}^1 L_n \end{cases} \quad (12)$$

通过 $\Lambda = \tilde{V}a$ 将模态坐标下的振动幅值 a 换到物理坐标下得到人字齿轮传动系统动态响应幅

值的近似值 Λ , 其中

$$\begin{aligned} a &= [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{16}]^T \\ \Lambda &= [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \cdots \quad \Lambda_{16}]^T \end{aligned}$$

4 修形参数对动载系数幅值的影响

输入扭矩为 $T_d = 127.32 \text{ N} \cdot \text{m}$, 输出扭矩为 $T_d = 381.96 \text{ N} \cdot \text{m}$; 转速为 4100 r/min , 即第3阶固有频率对应的临界转速; 其他参数如表1所列。根据式(12)求解不同参数下系统动态响应的幅值, 并计算动载系数幅值。动载系数幅值定义为

$$\begin{cases} \Delta K_v = \Delta \lambda_n k_{mi} / F_s \\ \Delta \lambda_n = \left[(\Lambda_i - \Lambda_{i+8}) \cos \left(\psi_s + \alpha - \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\ \quad (\Lambda_{i+9} - \Lambda_{i+11}) \sin \left(\psi_s + \alpha - \frac{\pi}{2} \right) + \\ \quad \left. r_n \Lambda_{i+3} - r_{n+2} \Lambda_{i+11} \right] \cos \beta_{n, n+2} + \\ \quad (\Lambda_{i+10} - \Lambda_{i+2}) \sin \beta_{n, n+2}, \\ \hat{i} = 1, 5 \end{cases} \quad (13)$$

图6给出了修形量 ρ_m 和修形长度 ξ_m 构成的域内取不同螺旋角时动载系数幅值的等值线。由图可以看出, 在修形量和修形长度构成的域内, 动载系数的等值线呈开口向右的弧形。当螺旋角 $\beta = 15^\circ$ 时, 在 $\rho_m = 25 \mu\text{m}$, $\xi_m = 0.81$ 处, 动载系数的幅值大约为 0.45, 这与第3节中的数值计算结果较为吻合; 动载系数幅值的最小值区域位于两条幅值为 0.08 的等值线之间, 该区域对应的 ρ_m 和 ξ_m 值为最优修形参数。当 $\beta = 25^\circ$ 时, 具有相同幅值的等值线相对 $\beta = 15^\circ$ 时向右移动, 即在 ξ_m 一定的情况下, 最优的 ρ_m 值有所增大; 而在 ρ_m 一定的情况下, 最优的 ξ_m 值有所减小。当 $\beta = 35^\circ$ 时, 具有相同幅值的等值线相对 $\beta = 25^\circ$ 时继续向右移动, 即在 ξ_m 一定的情况下, 最优的 ρ_m 值相对于 $\beta = 25^\circ$ 时继续增大; 而在 ρ_m 一定的情况下, 最优的 ξ_m 值相对于 $\beta = 25^\circ$ 时继续减小。

图7给出了修形量 ρ_m 和修形长度 ξ_m 构成的域内主动轮支承刚度取不同值时动载系数幅值的等值线。如图7所示, 最优修形参数取值区域仍然位于两条幅值最小的弧形等值线之间。当主动轮支承刚度为 $2 \times 10^8 \text{ N/m}$ 时, 具有相同幅值的等值线, 如幅值为 0.2 的等值线, 相对于 10^8 N/m 时向区域的四周扩大, 即相同幅值的等值线所包围的新月形区域面积增加, 最优修形参数的可选区域增大。当主动轮支承刚度为 $3 \times 10^8 \text{ N/m}$ 时, 具有相同幅值的等值线, 反而相对于主动轮支承

刚度等于 10^8 N/m 时向区域的中心收缩, 即相同幅值的等值线所包围的新月形区域面积减小, 最优修形参数的可选区域减小。

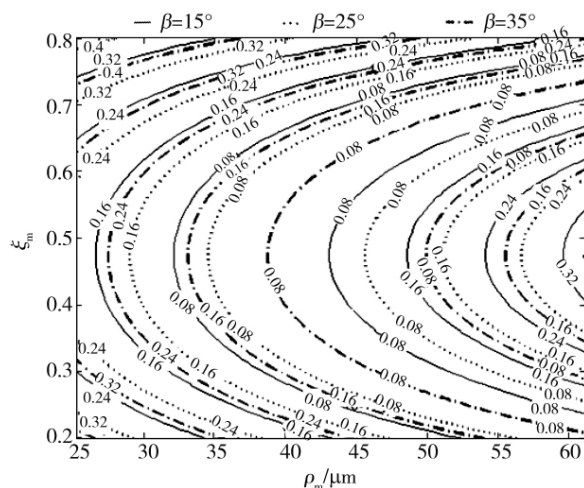


图6 不同螺旋角下载系数幅值的等值线

Fig. 6 Contour plot of dynamic load factor amplitudes with different helical angles

图8给出了修形量 ρ_m 和修形长度 ξ_m 构成的域内被动轮支承刚度取不同值时动载系数幅值的等值线。如图8所示, 最优修形参数取值区域同样位于两条幅值最小的等值线之间。当被动轮支承刚度为 $2 \times 10^8 \text{ N/m}$ 时, 具有相同幅值的等值线, 如幅值为 0.2 的等值线, 相对于 10^8 N/m 时向区域的中心收缩, 即相同幅值的等值线所包围的新

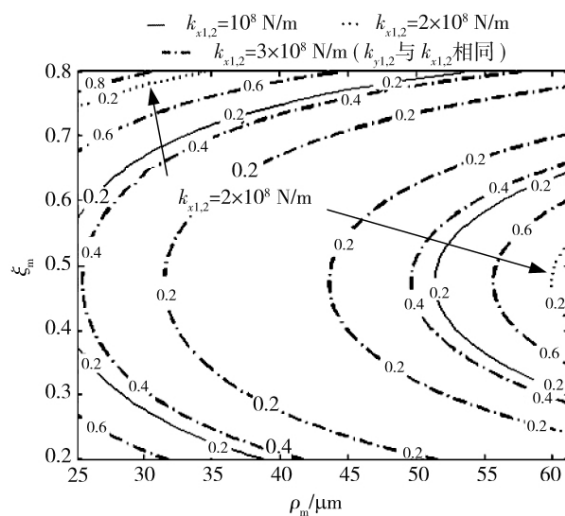


图7 不同主动轮的支承刚度下载系数幅值的等值线

Fig. 7 Contour plot of dynamic load factor amplitudes with different support stiffness of the driving gear

月形区域面积减小。当主动轮支承刚度为 3×10^8 N/m 时,具有相同幅值的等值线,相对于 2×10^8 N/m 时向区域的中心进一步收缩,即相同幅值的等值线所包围的新月形区域面积进一步减小,但是变化的幅度相对减小。

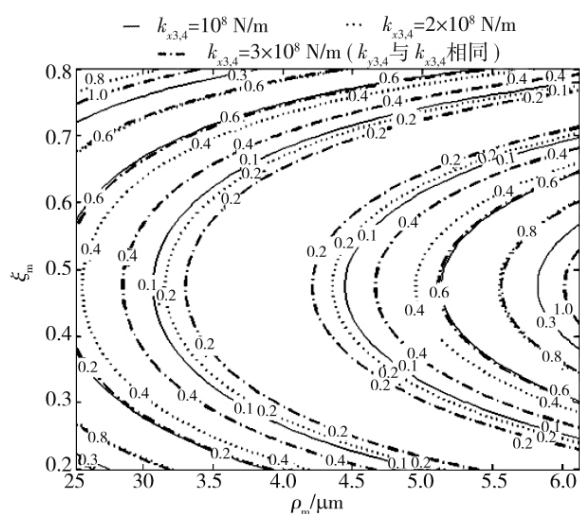


图8 不同被动轮的支承刚度下动载系数幅值的等值线
Fig. 8 Contour plot of dynamic load factor amplitudes with different support stiffness of the driven gear

5 结 论

本文根据考虑齿廓修形的人字齿轮传动的解析解,分析了主共振频率附近不同参数下修形长度和修形量对动载系数幅值的影响,得出如下结论:

1) 在修形量和修形长度构成的区域内,动响应幅值的等值线为开口向右的弧形曲线,使动载系数最小的修形参数取值域是两条动载系数幅值最小的等值线包围的新月形区域。

2) 螺旋角由 15° 增加到 25° 时,各等值线向右移动;继续增加到 35° 时,各等值线又相对 25° 时继续向右移动。螺旋角越大在一定修形长度下所需的修形量越大,而在一定修形量下所需的修形长度越小。3) 主动轮支承刚度为 2×10^8 N/m 时,具有相同动载系数幅值的等值线相对刚度为 10^8 N/m 时向四周扩大,最优修形参数取值区域增大;刚度为 3×10^8 N/m 时,具有相同幅值的等值线相对刚度为 10^8 N/m 时向区域中心收缩,最优修形参数取值区域减小。

4) 被动轮支承刚度为 2×10^8 N/m 时,具有相同幅值的等值线相对刚度为 10^8 N/m 时向区域中心收缩,最优修形参数取值区域减小;刚度为

3×10^8 N/m 时,具有相同幅值的等值线相对刚度为 2×10^8 N/m 时继续向区域中心收缩,最优修形参数取值区域继续减小,但变化幅度相对减小。

参考文献:

- [1] 吴勇军,王建军,韩勤锴,等. 基于接触有限元分析的斜齿轮齿廓修形与实验[J]. 航空动力学报, 2011, 26(2): 409-415.
WU Yongjun, WANG Jianjun, HAN Qinkai, et al. Tooth profile modification of helical gears and experimental study based on finite element contact analysis[J]. Journal of Aerospace Power, 2011, 26(2): 409-415. (in Chinese)
- [2] Simon V. Optimal tooth modifications for spur and helical gears[J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1989, 111(12): 611-615.
- [3] Wagaj P, Kahraman A. Influence of tooth profile modification on helical gear durability[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2002, 124(9): 501-510.
- [4] 王成,方宗德,贾海涛,等. 人字齿轮修形优化设计[J]. 航空动力学报, 2009, 39(2): 1432-1436.
WANG Cheng, FANG Zongde, JIA Haitao, et al. Modification optimization of double helical gears[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 39(2): 1432-1436. (in Chinese)
- [5] 孙月海,张策,葛楠. 含误差的直齿轮的齿廓修形[J]. 机械工程学报, 2009, 39(12): 91-94.
SUN Yuehai, ZHANG Ce, GE Nan. Tooth profile modification for spur gears with manufacturing error[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(12): 91-94. (in Chinese)
- [6] Velex P, Ville F. An analytical approach to tooth friction losses in spur and helical gears-influence of profile modifications[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2009, 131(10): 101008. 1-101008. 10.
- [7] Lin H H, Oswald F B, Townsend D P. Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications[J]. Mechanism and Machine Theory, 1994, 29(8): 1115-1129.
- [8] LIU Gang, Parker R G. Dynamic modeling and analysis of tooth profile modification for multimesh gear vibration[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2008, 130(12): 121402. 1-121402. 13.
- [9] Kahraman A. Dynamic analysis of a multi-mesh helical gear train[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1994, 116(9): 706-712.
- [10] Kubur M, Kahraman A. Dynamic analysis of a multi-shaft helical gear transmission by finite elements; model and experiment[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2004, 126(7): 398-406.
- [11] Kahraman A. Effect of axial vibrations on the dynamics of a helical gear pair[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1993, 115(1): 33-39.
- [12] Baud S, Velex P. Static and dynamic tooth loading in spur

- and helical geared systems-experiments and model validation[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2002, 124(6):334-346.
- [13] Kahraman A, Blankenship G W. Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1997, 64(3):217-226.
- [14] LIN Jian, Parker R G. Mesh stiffness variation instabilities in two-stage gear systems[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2002, 124(12):68-76.
- [15] Bahk C J, Parker R G. Analytical solution for the nonlinear dynamics of planetary gears[J]. ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2011, 6(4):021007. 1-021007. 15.